Exercice 1

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - 4z + 8 = 0$. Donner les solutions sous forme exponentielle.

b) Placer dans le plan $\mathscr{P}$ leurs images A et B, l'affixe de A étant la solution de l'équation dont la partie imaginaire est négative. On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.

2. Soit C le point d'affixe $z_C = 4$.

a) Calculer $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$.
Donner le résultat sous forme algébrique.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

3. On considère l'application T du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M', d'affixe z' défini par $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z$.

a) Caractériser géométriquement l'application T.

b) Construire le point $A' = T(A)$ puis déterminer l'affixe Z de A' sous forme algébrique.

c) Etablir que $Z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ et en déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 3 cm, E le milieu de $[AC]$ et D le point défini par :

$$4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$$

1. Etablir que $D = \text{Bar}\,\{(A;3)(B;-2)(C;3)\}$.
En déduire que D appartient à la médiatrice du segment $[AC]$.

2. Déterminer le réel α tel que $\overrightarrow{BD} = \alpha\overrightarrow{BE}$ puis réaliser une figure complète.

3. Calculer DB^2 puis DA^2.

4. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M du plan vérifiant la relation :

$$3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12$$

a) Déterminer $\mathscr{E}$.

b) Vérifier que le centre de gravité G du triangle ABC appartient à $\mathscr{E}$ puis tracer $\mathscr{E}$.

Exercice 3

Partie A

Soit f la fonction définie sur $I =]-1; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'origine O et d'unité graphique 5 cm.

1. Étudier les variations de la fonction f et déterminer ses limites aux bornes de I. En déduire que $\mathscr{C}$ admet une droite asymptote Δ que l'on précisera.

2. a) Écrire l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en un point M de $\mathscr{C}$, d'abscisse a. On note T_a cette tangente.

b) Montrer qu'il existe deux valeurs de a pour lesquelles la droite T_a passe par l'origine O.

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$. On mettra en évidence la droite Δ et les deux tangentes trouvées ci-dessus.

4. On pose : $\forall x \in I \quad F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$
La fonction F est-elle monotone ? Est-elle positive ?

Partie B

On pose $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
L'objet de cette partie est d'encadrer l'intégrale J. On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de J.

1. En utilisant l'étude de la fonction f réalisée dans la partie A, montrer que $1 \leqslant J \leqslant \dfrac{e}{2}$.

2. On pose, pour tout entier naturel n :

$$u_n = (-1)^n \int_0^1 t^n e^t\,\mathrm{d}t$$

a) Calculer u_0.

b) A l'aide d'une intégration par parties, établir que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = (-1)^{n+1}e + (n+1)u_n$.

c) Calculer alors successivement u_1, u_2, ..., u_6. On donnera les réponses sous la forme $ae - b$ avec a et b entiers naturels.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \int_0^1 e^t \frac{1 - (-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad J = S_n + R_n$
avec $R_n = (-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^1 t^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

c) Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{n+2} \leqslant |R_n| \leqslant \frac{e}{2(n+2)}$$

4. a) Trouver le plus petit entier n tel que :

$$\frac{e}{2(n+2)} - \frac{1}{n+2} < 0{,}05$$

b) Calculer $S_6 = \displaystyle\sum_{k=0}^{6} u_k$ sous la forme $ae - b$ avec a et b entiers naturels.

c) Prouver que $S_6 - \dfrac{e}{16} \leqslant J \leqslant S_6 - \dfrac{1}{8}$.

d) Déduire de ce qui précède un encadrement de J, d'amplitude inférieure à 0,05, par deux nombres décimaux.