# DES EXERCICES DE GÉOMÉTRIE

## A.LES ÉNONCÉS

### *Exercice I*

On considère deux réels $a$ et $b$ ainsi que les parties de l'espace donnés par leurs équations dans un repère cartésien :

$$D\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} x-z-a & = & 0 \\ y+3z+1 & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad D'\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z-2b & = & 0 \\ 3x+3y+2z-7 & = & 0 \end{array}\right.$$

Montrer que $D$ et $D'$ sont des droites. Montrer que $D$ et $D'$ ne sont pas parallèles.

### *Exercice II*

Dans l'espace muni d'un repère cartésien, on considère :

– les points $A(1{,}2{,}3)$ et $B(2,-1{,}2)$

– les droites affines $\mathcal{D}_1 : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3-\lambda \\ y & = & 1+2\lambda \\ z & = & -1+\lambda \end{array}\right.$ et $\mathcal{D}_2 : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+3\lambda \\ y & = & -2\lambda \\ z & = & 3+5\lambda \end{array}\right.$

– les plans affines $\mathcal{P}_1 : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-2\lambda+3\mu \\ y & = & -2+\lambda+\mu \\ z & = & 4-\lambda-2\mu \end{array}\right.$ , $\mathcal{P}_2 : 2x-y+3z-1=0$ et $\mathcal{P}_3 : x+2z-4=0$.

1) Montrer que $\mathcal{P}_1$ est bien un plan dont on donnera une équation cartésienne.
2) Donner une équation cartésienne du plan passant par $A$ et contenant $\mathcal{D}_1$.
3) Donner une représentation paramétrique de $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$.
4) Donner une équation cartésienne du plan contenant $\mathcal{D}_1$ et tel que $\mathcal{D}_2$ lui soit parallèle.
5) Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}_1$ et de la droite $(AB)$.

### *Exercice III*

Dans le plan, on considère les deux cercles

$$\mathcal{C}_1 :\ x^2+y^2=100 \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_2 :\ x^2+y^2-24x-18y+200=0$$

les équations étant données dans un repère orthonormé.

1) Montrer que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont un seul point d'intersection $A$ dont on donnera les coordonnées.
2) Donner l'équation de la droite $\mathcal{D}$, tangente commune à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ en $A$.
3) Montrer que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont, en dehors de $\mathcal{D}$, deux tangentes communes dont on donnera une équation (on pourra introduire le point d'intersection de ces deux tangentes pour éviter des calculs trop lourds).

### *Exercice IV*

Soient $A$, $B$, $C$ trois points non alignés du plan.

Montrer que, pour tout point $M$ du plan, il existe un unique triplet $(\alpha,\beta,\gamma)$ de réels tel que : $M$ est le barycentre de $\big\{(A,\alpha),\ (B,\beta),(C,\gamma)\big\}$ avec $\alpha+\beta+\gamma=1$.

### *Exercice V*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les plans

$$P : x+y+z=3 \ \text{ et } \ P' : x-3y+2z=3$$

1) Calculer la distance de l'origine à $P$, et la distance de l'origine à $P'$.

2) Montrer que $P \cap P'$ est une droite. On la notera $D$.
3) Déduire du 1) la valeur de la distance de l'origine à $D$.

### *Exercice VI*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère la sphère $(\mathcal{S})$ d'équation $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z+5=0$ et le plan $(\mathcal{P})$ d'équation $2x+y-z-4=0$

1) Montrez que $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{P})$ sont sécants.
2) En considérant le point $C$, projeté orthogonale de $O$ sur $(\mathcal{P})$, montrez que le plan et la sphère se coupent en un cercle de centre $C$.
3) Déterminez les coordonnées de $C$ en utilisant la distance de $O$ à $(\mathcal{P})$

### *Exercice VII*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, montrer qu'il existe une unique sphère passant par les points

$$A(4{,}5{,}1)\ B(2{,}5{,}-5)\ C(-4{,}5{,}1)\ D(4{,}3{,}3)$$

On déterminera le centre et le rayon de cette sphère.
Joker : montrer que les plans médiateurs de $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$ ont un point commun après avoir déterminé leurs équations cartésiennes.

## *Exercice VIII*

On considère le tétraèdre régulier (toutes ses faces sont des triangles équilatéraux) suivant

1) Montrer que $H$ est le centre de gravité du triangle $(ABC)$.
2) En travaillant dans le plan $(ADH)$, calculer la distance $DH$.
3) En déduire le volume du tétraèdre.

# B. COMMENT RÉSOUDRE CES EXERCICES

### *Exercice I*

Le but de l'exercice est de distinguer ce qui est du domaine *vectoriel* et ce qui est du domaine *affine* (*i.e.* ponctuel). L'ensemble $D$ est défini comme appartenant à deux plans. Quelle sont les différentes positions relatives de deux plans ? Que peut-on en déduire sur la nature de $D$ dans chaque cas ? Comment utiliser intelligemment les vecteurs normaux ?
Moralité : les valeurs de $a$ et $b$ influent-elles sur les directions des droites (domaine vectoriel) ? sur l'appartenance de points à ces droites (domaine affine) ?

### *Exercice II*

Le but de l'exercice est de travailler sur la résolution de systèmes n'ayant pas forcément autant d'équations que d'inconnues.

1) Plusieurs méthodes ici : compte-tenu de la pauvreté de nos outils de Terminale, le plus simple est d'*éliminer* $\lambda$ et $\mu$ pour obtenir une relation entre $x$, $y$ et $z$.
   Nous pouvons par exemple additionner les deux dernières lignes et en déduire $\mu$ en fonction de $y$ et $z$. Avec ces deux mêmes équations, nous pouvons éliminer $\mu$ et en déduire $\lambda$ en fonction de $y$ et $z$. Il ne restera plus qu'à remplacer $\lambda$ et $\mu$ par ces valeurs dans la première équation.

   Réponse : $x + 7y + 5z - 7 = 0$

2) $A$ et $\mathcal{D}_1$ définissent-ils bien un plan ? Comment le vérifier ?
   Il existe de nombreuses méthodes pour déterminer une équation de ce plan, malheureusement, les plus efficaces ne sont pas au programme. Il en reste au moins trois. Elles partent de la même constatation : un plan est défini par deux directions (aspect vectoriel) et un point (aspect affine).
   *1ère méthode :* Combien faut-il de points au minimum pour définir un plan ? Quelle condition doivent-ils remplir ? Quel est le lien avec notre remarque préliminaire ? Comment trouver rapidement les coordonnées de points appartenant à $\mathcal{D}_1$ ? Une équation cartésienne de plan est de la forme $ax+by+cz+d=0$ : cela nous fait quatre inconnues. Pour un plan donné, y a-t-il *une* ou *des* équations cartésiennes ? En utilisant nos trois points non alignés, nous obtenons trois équations : en quoi est-ce en accord avec la remarque précédente ? Il est temps maintenant de déterminer une équation du plan.
   Moralité : lorsqu'il y a plus d'inconnues que d'équations, nous trouverons une infinité de solutions. En Terminale, nous rencontrerons souvent des sytèmes de $n$ équations à $n+1$ inconnues ($n$ valant 2 ou 3): nous choisirons une inconnue comme *paramètre* et nous déterminerons les autres en fonction de ce paramètre (les différentes solutions seront donc proportionnelles).
   *2ème méthode :* tout serait si simple si nous connaissions un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal au plan. Notons $(a,b,c)$ ses coordonnées. Nous pouvons en revanche déterminer rapidement deux vecteurs non colinéaires appartenant à la *direction* du plan. Il suffit donc d'exprimer que $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à chacun de ces deux vecteurs. Cela nous donnera deux équations pour déterminer nos trois inconnues : c'est normal, il y a une infinité de vecteurs $\overrightarrow{n}$, leurs coordonnées étant toutes proportionnelles.
   Cela nous permet donc de déterminer la partie vectorielle de l'équation. Il reste à déterminer la partie affine en utilisant les coordonnées d'un point bien choisi.
   *3ème méthode :* il s'agit dans un premier temps de déterminer une représentation paramétrique du plan. Nous pouvons en effet trouver un point $E$ du plan et deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires (qui formeront donc un repère du plan) . Alors un point $M$ appartient au plan si, et seulement si, il existe deux réels $\lambda$ et $\mu$ (ses coordonnées dans le repère du plan) tels que $\overrightarrow{EM} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$. Ensuite, nous pouvons appliquer la méthode du 1).

   Réponse : $7x + 2y + 3z = 20$

3) Pouvons-nous savoir quelle sera la nature de l'intersection des deux plans sans calcul ?
   Maintenant que nous savons que les plans sont sécants, nous savons que leur intersection est une droite déterminée par un point et une direction. Ici encore, plusieurs méthodes existent. La plus simple est sûrement de choisir une inconnue comme paramètre (ici encore, nous avons plus d'inconnues que d'équations).

   Réponse : $x = -2\lambda + 4$, $y = -\lambda + 7$, $z = \lambda$

4) Tout d'abord, il s'agit de vérifier que les données du texte définissent bien un plan.
Ensuite, nous pouvons trouver une représentation paramétrique du plan et appliquer la méthode du 1).

Réponse : $3x + 2y - z - 12 = 0$

5) Il s'agit d'abord de réfléchir à la position relative d'une droite et d'un plan.
Ensuite, cherchons à obtenir une représentation paramétrique de la droite $(AB)$ puis injectons ces valeurs dans une équation cartésienne de $\mathcal{P}_1$. Si nous trouvons une valeur unique du paramètre, nous déterminons ainsi un point unique d'intersection; si nous trouvons une infinité de valeurs du paramètre, la droite est incluse dans le plan; si nous ne trouvons pas de solution, la droite est strictement parallèle au plan.

Réponse : un point d'intersection $G(48/25, -44/25, 52/25)$

## *Exercice III*

l'exercice utilise le cours sur les barycentres, les cercles, la distance d'un point à une droite.

1) Déterminez les coordonnées de $O_1$ et $O_2$.
Pour obtenir les coordonnées de $A$, déterminez de quel système il est le barycentre et pensez à la balance romaine.

Réponse : $A(8,6)$

2) La tangente en $A$ est perpendiculaire au diamètre passant par $A$, ce qui nous permet d'obtenir un vecteur normal à la tangente.

Réponse : $12x + 9y = 150$

3) Pensez au théorème de Thalès pour déterminer les coordonnées de I.
Il reste à exprimer que les tangentes passent par $I$ et sont à une distance 10 de $O_1$.

Réponse : $I(24,18)$ $(4 + 6\sqrt{2})x + (3 - 8\sqrt{2})y = 150$ et $(4 - 6\sqrt{2})x + (3 + 8\sqrt{2})y = 150$

## *Exercice IV*

Les points $A$, $B$ et $C$ étant non alignés, $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ forme un repère cartésien du plan. Ainsi, pour tout point $M$ du plan, il existe un unique couple de réels $(x,y)$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, d'où

$$(1 - x - y)\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$$

La somme des coefficients étant non nulle et égale à 1, nous en déduisons que tout point du plan est barycentre de ce qu'il faut.
Si $A$, $B$ et $C$ étaient alignés, tout point non aligné avec eux aurait les pires difficultés à être barycentre d'un système formé de ces trois points...
On dit que $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont les *coordonnées barycentriques* de $M$ par rapport à $A$, $B$ et $C$.

## *Exercice V*

Il existe une formule pour calculer directement la distance d'un point à une droite dans l'espace, mais elle n'est pas au programme de terminale.

1) Rappel : $d(M_0,P) = |ax_0+by_0+cz_0-d|/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ avec les notations usuelles, le repère étant orthonormé.

Réponse : $d(O,P) = 3/\sqrt{3} = \sqrt{3}$ $\qquad d(O,P') = 3/\sqrt{14}$

2) Les deux plans ne sont pas parallèles (en considérant leurs vecteurs normaux par exemple). Ils sont donc sécants selon une droite.
Résolvons *pour le plaisir* le système obtenu avec les équations des deux plans. Nous obtenons, par exemple

$$\begin{cases} = -5\lambda + 3 \\ y = \lambda \\ z = 4\lambda \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Donc $D$ est la droite dirigée par $\overrightarrow{v}(-5{,}1{,}4)$ et passant par $A(3{,}0{,}0)$.

3) Une figure dans un plan orthogonal à $D$ s'impose.

Les plans $P$ et $P'$ ont l'immense avantage d'être perpendiculaires : en effet, leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Réponse : $d = d(O,D) = \sqrt{d^2(O,P) + d^2(O,P')} = \sqrt{51/14}$

### *Exercice VI*

La résolution algébrique du système formé par les deux équations s'avère délicate, c'est pourquoi on préfère raisonner géométriquement.

1) Calculer le rayon de la sphère et $d(O,\mathcal{P})$.

Réponse : $O(1{,}2,-3)$, $R = 3$, $d(O,\mathcal{P}) = \sqrt{62} < 3$

2) Soit $M$ un point de l'intersection de la sphère et du plan, alors le triangle $OCM$ est rectangle en $C$.

Réponse : $R = \sqrt{15/2}$

3) Déterminons les coordonnées de $C$ dans le repère orthonormé $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
$\overrightarrow{\Omega C} = \overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{\Omega O} + d(O,\mathcal{P})\overrightarrow{n}$, avec $\overrightarrow{n}$ un vecteur normé orthogonal à $\mathcal{P}$ ayant le même sens que $\overrightarrow{OC}$, d'où $\overrightarrow{n}(2{,}1,-1)\varepsilon/\sqrt{6}$ avec $\varepsilon \in \{-1{,}1\}$. Nous obtenons deux candidats : $C_1(2{,}5/2,-7/2)$ et $C_2(0{,}3/2,-5/2)$.
Or seul $C_2$ appartient à $\mathcal{P}$, donc $C = C_2$.
Réciproquement, tous les points du cercle appartiennent au plan et à la sphère, donc à leur intersection.

Finalement le plan et la sphère se coupent en le cercle de $\mathcal{P}$ de rayon $\sqrt{15/2}$ et de centre $C(0{,}3/2,-5/2)$.

### *Exercice VII*

Dans l'espace, tout point équidistant des extrémités d'un segment est situé sur *le plan médiateur* de ce segment.

Soit $P_{AB}$ le plan médiateur de $[AB]$. Alors il admet $\overrightarrow{AB}(-2{,}0,-6)$ comme vecteur normal. Son équation est donc de la forme $-2x - 6z + b = 0$, avec $b \in \mathbb{R}$. De plus le milieu $I_{AB}(3{,}5,-2)$ de $[AB]$ appartient à $P_{AB}$. Nous obtenons donc que $P_{AB}\ :\ x + 3z + 3 = 0$.
Nous obtenons de même $P_{AC}\ :\ x = 0$ et $P_{AD}\ :\ y - z - 2 = 0$.
La résolution du système associé montre que ces trois plans sont sécants en $O(0{,}1,-1)$, donc $O$ est équidistant des quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$.
Enfin, $OA = OB = OC = OD = 6$, donc les quatre points sont situés sur la sphère de centre $O(0{,}1,-1)$ et de rayon 6.

### *Exercice VIII*

1) Notons $A'$ le milieu de $[BC]$.Il s'agit de montrer que $H$ appartient à $(AA')$. Le plan médiateur de $[BC]$ passe par $A'$, $D$ et $A$, tous trois équidistants de $B$ et de $C$. Il contient donc également $H$ car il est orthogonal au plan $(ABC)$ et contient la droite $(AD)$.
Ainsi $H \in (AA')$, et nous pouvons montrer de la même manière que $H$ appartient aux deux autres médianes du triangle $(ABC)$. Ainsi $H$ est le centre de gravité du triangle $(ABC)$.

2) Plaçons-nous à présent dans le plan $(ADH)$. La figure suivante résume la situation :

   Nous en déduisons que $DH^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{3}$

3) Finalement $\mathcal{V} = a^3\sqrt{2}/12$